teorema dell'isomorfismo

V spazio vettoriale e $\dim V = n$

allora $V \simeq \mathbb{R}^n$

L'isomorfismo è dato fissando una base $B = \{b_1 \dots b_n\}$ di V

$f : V \to \mathbb{R}^n$

$\quad b_i \to b_i$

Esempio

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$B = \{1, x, x^2\}$ base

$\mathcal{C}_1 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$

$1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x^2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a + bx + cx^2 \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\mathcal{C} = \{\underset{c_1}{\overset{\shortparallel}{1+x^2}}, \underset{c_2}{\overset{\shortparallel}{x+x^2}}, \underset{c_3}{\overset{\shortparallel}{1+x}}\}$ base

$\mathcal{C}_2 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$

$1+x^2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x+x^2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$1+x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 1+x^2 & \xrightarrow{\mathcal{C}_1} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}_2} & & \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

Proposizione V spazio vettoriale B base di V, $v \in V$, $n = \dim V$

$B = \{ b_1 \dots b_n \}$

$\Rightarrow \exists! \lambda_1 \dots \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n$ $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ coordinate di V

phi

$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ $\boxed{\varphi}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$b_i \to e_i$

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 \varphi(b_1) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n)$

$= \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → come faccio a scrivere questo vettore rispetto alla base B

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lo stesso vettore può essere scritto in modi diversi se ci basiamo su basi diverse

V, W spazi vettoriali $\dim V = n$, $\dim W = m$

$B_V = \{ v_1 \dots v_n \}$ base di V, $B_W = \{ w_1 \dots w_m \}$ base di W

$f: V \to W$ omomorfismo

$\{ f(v_1) \dots f(v_n) \} \subseteq W$

$$\boxed{f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots a_{mj} w_m}$$

$v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$

$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_i) = \lambda_1 (a_{1j} w_1 \dots + a_{mj} w_m) =$

$\lambda_n (a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) =$

$$v\,[v]_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad [f(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[f(v)]_{B_W} = (a_{ij})\, [v]_{B_V}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) = [M(f)]^{B_V}_{B_W}$$

matrice che rappresenta l'omomorfismo e si base su queste 2 basi

Esempi

$f: R_2 \to R_3$ imposto la base standard

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[M(f)]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E} \to$ base standard

$f: R^3 \to R^2$ imposto la base standard

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y-3z \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[M(f)]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo serve per associare una matrice ad un'omomorfismo

teorema V, W spazi vettoriali $\dim V = n$, $\dim W = m$

$$\underbrace{Hom(V,W)}_{\text{tutti gli omomorfismi da } V \to W} \simeq M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$f: R^3 \to R^2$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Sapendo solo queste cose posso continuare come sotto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x + 8y + 2x \\ y + 5z \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hom}(V, W) \simeq \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$f \rightarrow [\mathcal{M}(f)]^{B_V}_{B_W}$$

L'isomorfismo dipende dalla scelta della base

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ questo è un'endomorfismo

$$\boxed{\mathrm{End}(V)} \simeq \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

matrice identità

$$\mathrm{id} : V \rightarrow V$$

$$[\mathcal{M}(\mathrm{id})]^{B}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione

V, W, U spazi vettoriali dim n, m, p rispettivamente con basi finite

$f: V \to W$, $g: W \to U$

Siano $M(f) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $M(g) \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ e $g \circ f: V \to U$

$M_{p,n}(\mathbb{R}) \ni M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

Corollario

$f \in End(V)$

f è invertibile

$M(f^{-1}) = \underbrace{M(f)^{-1}}$

$\hookrightarrow$ possiamo usare G-J per capire se è invertibile

Proposizione $f: V \to W$ omomorfismo, fissiamo basi di V e W e consideriamo $M(f)$

$Ker\, f \overset{\text{isomorfismo}}{\cong} Ker\, M(f)$

$Imm\, f \cong col(M(f))$ tutte le colonne non nulle di $M(f)$

$\|$

$\langle f(b_1) \dots f(b_n) \rangle \subseteq W \cong \mathbb{R}^m$

$B = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V

$\dim W = m$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con base standard fissate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f \simeq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\to$ capiamo che non è iniettiva

$$\operatorname{Im}(f) \simeq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \simeq \mathbb{R}^2}$$

è suriettiva perché $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

$\operatorname{null}(f) = \dim \operatorname{Ker} = 1$

teorema del rango

$\operatorname{null}(f) + \operatorname{rk}(f) = 3 = \dim V$

Corollario

$f: V \to W$ omomorfismo fissiamo basi di V e W e $M(f)$ è la matrice associata

$\operatorname{null}(f) = \operatorname{null}(M(f))$, $\operatorname{rk}(M(f)) = \operatorname{rk}(f)$

Cambiamento di base: V, W spazi vettoriali, $\dim V = n$, $\dim W = m$

$f: V \to W$

$B_V = \{v_1 \dots v_n\}$ base di V, $B_W = \{w_1 \dots w_m\}$ base di W

$[M(f)]^{B_V}_{B_W} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\qquad B'_V = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V

$B'_W = \{c_1 \dots c_m\}$ base di W $\qquad [M(f)]^{B'_V}_{B'_W}$

che relazione c'è tra queste matrici?

$v \in V$

$$[f(v)]_{B_W} = [M(f)]^{B_V}_{B_W} \cdot [v]_{B_V}$$

$$[f(v)]_{B'_W} = [M(f)]^{B'_V}_{B'_W} \cdot [v]_{B'_V}$$

$\{v_1 \dots v_n\}$ base di V

$$b_j = b_{1j} \cdot v_1 + b_{2j} \cdot v_2 + \dots b_{nj} \cdot v_n$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [b_1]_{B_V} & [b_2]_{B_V} & \dots & [b_n]_{B_V} \end{pmatrix}$$

$$[b_j]_{B_V} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$V \to V$

$v_i \to b_i$

Un cambiamento di base corrisponde ad un endomorfismo